Center for Statistik
Handelshøjskolen i København

Tue Tjur

Marts 2010

Notat 2.

Kort om klassisk porteføljeteori

1. Optimale porteføljer.

Antag at vi har et beløb w til rådighed, som vi vil investere i værdipapirer. Et værdipapir kan f.eks. være en aktie, en obligation, en andel i en investeringsforening eller for den sags skyld et ejerskab til fast ejendom eller et indestående i en bank. I det følgende omtaler vi dem allesammen som aktier, da det er det projektet handler om. Desuden vil vi i dette notat for nemheds skyld hele tiden arbejde med en tidshorisont på ét år, således at det er porteføljens værdi om et år vi forsøger at optimere.

Antag at der er n aktier, nummereret $1, \ldots, n$, at vælge imellem. Desuden er der et "papir" med en særlig status, kaldet den *risikofrie investering* med fast rente r_0, som vi tildeler nummeret 0. Problemet med aktier og (i lidt mindre grad) obligationer er jo, at man ikke kan vide hvad de er værd om et år. Hvis man vil være (næsten) 100% sikker på hvad man har til rådighed om et år, må man sætte sine penge ind på en konto med fast rente i et bundsolidt pengeinstitut, købe statsobligationer som udløber om et år eller lignende. Så vil man til gengæld ikke få så høj rente som man i gennemsnit får ved mere usikre investeringer.

De nuværende kurser (priser) på de n forhåndenværende aktier betegnes med $x_1, \ldots, x_n$. Vi kan sætte $x_0 = 1$, svarende til at enheden her er "1 kr." (indsat på bankkontoen). Den portefølje vi skal sammensætte kommer så til at bestå af λ_0 kr. risikofrit investeret, λ_1 enheder af aktie nr. 1, λ_2 enheder af aktie nr. 2, …, hvor λ'erne er ikke–negative vægte med

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = w\,.$$

Lad $X_1, \ldots, X_n$ betegne kurserne efter 1 år. Vi kender dem ikke, så vi fortolker dem naturligt som stokastiske variable. Helt urealistisk lader vi som om vi kender deres simultane fordeling. Det gør man naturligvis ikke i praksis, men undskyldningen for alligevel at lade som om vi gør det, er, at man til en vis grad kan estimere denne fordeling ud fra historiske data. For den risikofrie investering — som netop adskiller sig fra de andre ved *ikke* at være stokastisk — skal vi selvfølgelig sætte $X_0 = 1 + r_0$.

Porteføljens værdi efter et år kan nu skrives

$$W = \lambda_0 X_0 + \lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n\,.$$

Dette er en stokastisk variabel, hvis fordeling i princippet kan beregnes. Så hele problemet omkring optimering af porteføljen er hermed transformeret til følgende problem: Hvilke egenskaber ved fordelingen af en porteføljes værdi (og det kunne jo for eksempel være en persons samlede pensionsopsparing) er ønskværdige?

Det umiddelbart indlysende svar — som ganske vist ikke er det endelige svar, da det helt ignorerer fænomenet *risikoaversion* — er, at det gælder om at gøre *middelværdien* (i denne sammenhæng også kaldet *den aktuarmæssige værdi*)

$$\mathrm{E}W = \lambda_0(1 + r_0) + \lambda_1 \mathrm{E}X_1 + \lambda_2 \mathrm{E}X_2 + \cdots + \lambda_n \mathrm{E}X_n$$

så stor som muligt. Dette optimeringsproblem har (som man let kan indse) følgende løsning. Lad $1 + r_1 = \mathrm{E}X_1/x_1, \ldots, 1 + r_n = \mathrm{E}X_n/x_n$ betegne de forventede forrentninger af de n aktier (og bemærk, at vi også har $1 + r_0 = \mathrm{E}X_0/x_0$ for den risikofrie investering). For den aktie (eller den risikofrie investering, som det i princippet også kunne være) $i = i_{\max}$, som har den største forventede rente r_i, sætter vi $\lambda_{i_{\max}} = w/x_{i_{\max}}$, alle de andre λ'er sættes lig med 0. Med andre ord: Hele formuen w investeres i den aktie, som har det højeste forventede udbytte pr. kr.

Som enhver investor (og enhver bankrådgiver, med nogle få pinlige undtagelser fra Roskilde) ved, er det helt afgjort ikke sådan man skal gøre. Med mindre man er meget spilleglad skal man sprede sine investeringer over flere forskellige aktier, for hvis man sætter alle pengene på en enkelt ville det jo være fatalt hvis netop dette firma klarede sig dårligt i årets løb. Den matematiske formalisering af dette princip — en efterhånden gammel sag, der skyldes økonomer som von Neumann, Morgenstern, Markowitz og Sharpe — kan kort beskrives som følger:

I stedet for at maksimere det forventede udbytte $\mathrm{E}W$ vil den fornuftige investor (mere eller mindre bevidst) søge at maksimere et kriterium af formen $\mathrm{E}u(W)$, hvor u er en voksende konkav funktion, i denne sammenhæng kaldet en *von Neumann–Morgenstern nyttefunktion*. Man kan faktisk bevise en forholdsvis dyb økonomisk sætning, som siger at en investor der *ikke* opfører sig på den måde, agerer inkonsekvent, idet han kan narres til at foretage en række transaktioner som samlet fører til et tab.

Konkaviteten af u bevirker, at en portefølje med højt forventet udbytte og stor spredning kan være dårligere end en portefølje med lidt lavere forventet udbytte og mindre spredning. Teorien afspejler således den typiske investors risikoaversion, som i sin mest ekstreme form kan illustreres ved situationer som følgende. Antag, at du kan vælge mellem

1. At få udbetalt 1000 kr.

2. At få udbetalt et beløb som afhænger af et møntkast, 2000 kr. hvis udfaldet er krone og 0 kr. hvis udfaldet er plat.

For begge situationer gælder jo, at den forventede værdi af udbetalingen netop er 1000 kr. Men de fleste ville nok vælge nummer 1. Nummer 2 kunne komme på tale, hvis man netop stod og manglede 2000 kr., eller bare var helt vild med enhver form for gambling. Men aversionen mod risiko ville nok vinde hos de fleste, og dette ville være endnu mere udtalt hvis man ændrede beløbene til, for eksempel, 10 millioner og 20 millioner i stedet for 1000 og 2000. For de fleste mennesker er forskellen mellem 10 og 20 millioner jo ret betydningsløs i forhold til springet fra ingenting til 10 millioner.

Det viser sig, at fortolkningen af denne matematiske formalisme bliver særligt simpel under følgende yderligere antagelser:

1. Fordelingen af $(X_1, \ldots, X_n)$ er en flerdimensional normal fordeling.
2. Nyttefunktionen u har den specielle form

$$u(W) = -\exp(-\gamma W)\,.$$

for en passende konstant $\gamma > 0$

Under disse antagelser kan man (uden alt for stort besvær, prøv selv) vise at

$$\mathrm{E}u(W) = -\exp\left(-\gamma\left(\mathrm{E}W - \frac{\gamma}{2}\mathrm{var}(W)\right)\right)\,.$$

Det betyder åbenbart, at en optimal portefølje fås for de værdier af $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ som maksimerer

$$\mathrm{E}W - \frac{\gamma}{2}\mathrm{var}(W)$$

under bibetingelsen $\lambda_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = w$. Dette kriterium er så pænt og intuitivt forståeligt, at man ofte benytter det helt uden at interessere sig for om forudsætningerne (normalitet af fordelingen og den eksponentielle form af nyttefunktionen) er opfyldt. Og det vil vi også gøre i det følgende. I det generelle tilfælde kan kriteriet $\mathrm{E}W - \frac{\gamma}{2}\mathrm{var}(W)$ opfattes som en approksimation, idet man ved Taylorudvikling til og med anden orden af nyttefunktionen u i punktet $\mathrm{E}W$ kan vise at

$$\mathrm{E}u(W) \approx u\left(\mathrm{E}W + \frac{1}{2}\frac{u''(\mathrm{E}W)}{u'(\mathrm{E}W)}\mathrm{var}(W)\right) = u\left(\mathrm{E}W - \frac{1}{2}\gamma(\mathrm{E}W)\mathrm{var}(W)\right)$$

hvor

$$\gamma(\mathrm{E}W) = -\frac{u''(\mathrm{E}W)}{u'(\mathrm{E}W_i)}$$

er den såkaldte (grad af) *risikoaversion*, som altså i almindelighed er en funktion af $\mathrm{E}W$. Kun i det specielle tilfælde, hvor nyttefunktionen kan skrives på eksponentiel form, er den konstant (og lig med den parameter, som vi i denne forbindelse også kaldte for γ).

At det kriterium vi skal maksimerere afhænger voksende af fordelingens middelværdi (det forventede udbytte) og aftagende af dens varians forekommer jo helt rimeligt. Fortolkningen af γ som graden af risikoaversion virker også rimelig: For $\gamma = 0$ reducerer kriteriet jo til, at vi skal maksimere EW (ingen risikoaversion overhovedet). For $\gamma \to \infty$ bliver kriteriet mere og mere til, at vi skal minimere variansen helt uden hensyn til det forventede udbytte, hvilket i grænsen bliver til at alle pengene skal investeres risikofrit.

2. Den optimale portefølje for n = 2.

Før vi ser på den generelle situation er det instruktivt at se på tilfældet $n = 2$. Vi begynder med at se på situationen hvor X_1 og X_2 er stokastisk uafhængige. Her viser det sig at være let at give et lukket udtryk for den optimale portefølje, som ikke involverer matriksinversion o.l. Antag at X_1 og X_2 er normalfordelte med middelværdier $\mu_1 = (1 + r_1)x_1$ og $\mu_2 = (1 + r_2)x_2$ og varianser σ_1^2 og σ_2^2. Vi sætter, i logisk forlængelse af disse betegnelser, $\mu_0 = 1 + r_0$. Hvis vi håndterer bibetingelsen ved at sætte

$$\lambda_0 = w - (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$$

reducerer problemet til, at vi skal maksimere

$$(w - (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2))\, \mu_0 + \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 - \frac{\gamma}{2} \left(\lambda_1^2 \sigma_1^2 + \lambda_2^2 \sigma_2^2 \right)$$

For $\gamma > 0$ er det let at indse, at dette andengradspolynomium i λ_1 og λ_2 har et entydigt maksimum, når vi ser bort fra kravet om at λ'erne skal være ≥ 0. Vi begynder med at finde dette maksimumspunkt ved at løse de to ligninger, der sætter de to partielle afledede lig med 0. Så må vi bagefter diskutere hvad man skal stille op — og hvad det betyder — hvis en eller flere af de tre koefficienter bliver < 0. Ligningerne bliver

$$-x_1 \mu_0 + \mu_1 - \gamma \sigma_1^2 \lambda_1 = 0 \qquad \text{og} \qquad -x_2 \mu_0 + \mu_2 - \gamma \sigma_2^2 \lambda_2 = 0\,,$$

med løsninger

$$\lambda_1 = \frac{\mu_1 - x_1 \mu_0}{\gamma \sigma_1^2} \qquad \text{og} \qquad \lambda_2 = \frac{\mu_2 - x_2 \mu_0}{\gamma \sigma_2^2}\,.$$

Vi ser, at en koefficient λ_i i dette simple tilfælde bliver negativ hvis og kun hvis den tilhørende aktie har lavere forventet udbytte end den risikofrie investering. En sådan aktie ville man selvfølgelig aldrig investere i, så i praksis er dette ikke noget problem. I opgaven vil vi håndtere negative koefficienter simpelthen ved at udelukke de tilhørende aktier fra dem vi kan vælge imellem. Men en negativ koefficient kan faktisk tillægges en konkret betydning, som (måske) kunne være relevant for en professionel investor. Umiddelbart er det jo klart, at hvis man i forvejen har nogle af disse aktier skal man sælge dem. Hvis man ikke har nogen kan man måske låne nogen (mod et mindre gebyr), sælge dem og investere pengene i noget bedre, og — når året er gået, og kursen som forventet er faldet til noget mere rimeligt — købe dem igen og levere dem tilbage. Eller man kan udstede "kopiaktier" med garanteret samme betalingsflow som de ægte aktier, og sælge dem. Sådanne manøvrer går under betegnelsen "short selling". De kræver at omverden har urokkelig tillid til én, og er derfor irrelevante for langt de fleste investorer.

Koefficienten $\lambda_0 = w - (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$ kan også gå hen og blive negativ, men det har en anden betydning. Rent teoretisk svarer det til, at det ville kunne betale sig at låne λ_0 kr. til rente r_0 og bruge dem til at købe aktier for. For den almindelige investor er dette rent hypotetisk, da udlånsrente og indlånsrente jo plejer at være meget forskellige. Vi vil fortolke det således, at hele beløbet skal investeres i aktier. Det vil blive forklaret mere præcist senere.

I det lidt mere komplicerede tilfælde hvor (X_1, X_2) følger en vilkårlig todimensional normalfordeling kan man også løse optimeringsproblemet eksplicit. Vi springer udregningerne over og viser resultatet:

$$\lambda_1 = \frac{\frac{\mu_1 - x_1\mu_0}{\sigma_1} - \rho\frac{\mu_2 - x_2\mu_0}{\sigma_2}}{\gamma\sigma_1(1-\rho^2)} \qquad \lambda_2 = \frac{\frac{\mu_2 - x_2\mu_0}{\sigma_2} - \rho\frac{\mu_1 - x_1\mu_0}{\sigma_1}}{\gamma\sigma_2(1-\rho^2)}$$

hvor ρ er korrelationen mellem X_1 og X_2. Et lidt mere kompliceret resultat, men man kan da i det mindste se, at hvis parametrene i de to fordelinger er nogenlunde ens og/eller ρ ikke ligger for tæt på 1, så vil λ_1 og λ_2 blive positive (stadig under forudsætning af at aktierne har højere forventet udbytte end den risikofrie investering).

Bemærk følgende to fundamentale egenskaber ved løsningen, som angår porteføljens "risikable andel" $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ eller — som vi passende kan kalde den her — *aktieandelen*:

(1) Aktieandelen er omvendt proportional med risikoaversionen γ, men afhænger ikke (!) af den samlede investering w.

(2) Aktieandelens relative sammensætning (i dette tilfælde forholdet mellem λ_1 og λ_2) afhænger ikke af risikoaversionen γ.

Disse to egenskaber viser sig at holde generelt (altså også for $n > 2$, vilkårlig flerdimensional normalfordeling af X'erne). Egenskaben (1), som nedstammer direkte fra antagelsen om en eksponentiel nyttefunktion, må desværre siges at være ret urealistisk, med mindre den suppleres med en specifikation af hvordan γ skal aftage når w vokser. Hvis γ opfattes som en konstant, der afspejler investorens urokkelige holdning, indebærer (1) jo at når blot w overstiger den beregnede aktieportefølje $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$, så er det beløb der skal investeres i aktier uafhængigt af det samlede beløb w.

I den praktiske brug af porteføljeteorien er det derfor resultatet (2), snarere end den endelige beregning af en optimeret portefølje, der er det vigtigste. Det man i bedste fald kan bruge teorien til er at give et fornuftigt bud på aktieandelens relative sammensætning. Fastlæggelsen af balancen mellem den risikofrie andel og aktieandelen vil man typisk foretage ved mere jordnære overvejelser, som ikke kræver, at man tager stilling til hvad risikoaversionen γ skal sættes til ved optimeringen. Nogle investeringsrådgivere benytter diverse tommelfingerregler for, hvad forholdet mellem de to andele bør være. Vi skal senere forklare hvordan afbalanceringen kan foretages ved en vurdering, som er relateret til begrebet "value–at–risk" (VaR).

3. Beregning af den optimale portefølje generelt.

Lad λ betegne $n\times 1$ søjlevektoren bestående af de n ukendte koefficienter, x tilsvarende $n \times 1$ søjlevektoren der indeholder kurserne $x_1, \ldots, x_n$, og antag at $X = (X_1, \ldots, X_n)$ er normalfordelt med middelværdivektor μ (ligeledes $n \times 1$) og kovariansmatriks Σ $(n \times n)$. Vi skal så, idet bibetingelsen igen håndteres ved at sætte $\lambda_0 = w - (\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n)$, maksimere

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(W) - \frac{\gamma}{2}\mathrm{var}(W) &= (w - (\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n))\mu_0 + \lambda'\mu - \frac{\gamma}{2}\lambda'\Sigma\lambda \\ &= w\mu_0 + \lambda'(\mu - \mu_0 x) - \frac{\gamma}{2}\lambda'\Sigma\lambda \,. \end{aligned}$$

Ændringen af denne størrelse, når λ ændres til $\lambda + \Delta$ for en vektor Δ med (infinitesimalt) små elementer, ses at være

$$\begin{aligned} \Delta'(\mu - \mu_0 x) - \frac{\gamma}{2}\Delta'\Sigma\lambda - \frac{\gamma}{2}\lambda'\Sigma\Delta - \frac{\gamma}{2}\Delta'\Sigma\Delta \\ = \Delta'\left((\mu - \mu_0 x) - \gamma\Sigma\lambda\right) \end{aligned}$$

(hvor vi i den sidste udregning har ignoreret et led som er lille af anden orden i Δ). I maksimumspunktet må der derfor gælde

$$(\mu - \mu_0 x) - \gamma\Sigma\lambda = 0$$

hvoraf følger, at den optimale portefølje fås for

$$\lambda = \frac{1}{\gamma}\Sigma^{-1}(\mu - \mu_0 x)\,.$$

Denne løsning skal selvfølgelig korrigeres på en eller anden måde hvis en eller flere af λ'erne bliver negative. Det enkleste er at ekskludere aktier med negativ koefficient og gentage udregningen. Denne procedure må man så gentage indtil alle koefficienterne er ikke–negative. Hvis λ_0 er negativ må man fjerne den risikofri andel og omnormere aktieandelen tilsvarende.

4. Et gennemregnet eksempel (frit efter Carsten Sørensen).

200 kr. skal investeres i to aktier med kurs 100, forventede udbytter $\mu_1 = 110$ og $\mu_2 = 108$, stokastisk uafhængige og begge med varians 400, samt den risikofrie investering som har rente 4%. Risikoaversionen sættes (helt arbitrært) til $\gamma = 0.02$. Følgende R–program foretager beregningerne:

```
> rm(list=ls())
> # Input
> gamma <- 0.02
> mu0 <- 1.04
> w <- 200
> x <- rbind(100,100)
> mu <- rbind(110,108)
> S <-  matrix(c(400,0,0,400),2,2)
> #
> # Beregninger
> lambda <- solve(S,mu-mu0*x)/gamma
> Lambda <- rbind(w-sum(lambda*x),lambda)
> Andele <- rbind(w-sum(lambda*x),lambda*x)
> res <- cbind(rbind(0,1,2),Lambda,Andele)
> #
> # Vægte og andele i porteføljen:
> round(res,4)
     [,1]  [,2] [,3]
[1,]    0 75.00   75
[2,]    1  0.75   75
[3,]    2  0.50   50
> forventet <- sum(lambda*mu)+mu0*(w-sum(lambda*x))
> #
> # Forventet slutbeløb:
> round(forventet,2)
[1] 214.5
> #
> # Forventet udbytte i procent:
> round((forventet-w)/w*100,2)
[1] 7.25
> sd <- sqrt(t(lambda)%*%S%*%lambda)
> #
> # Standardafvigelse på slutbeløb:
> round(sd,2)
      [,1]
[1,] 18.03
> #
> # Sandsynligheden for negativt udbytte:
> round(pnorm(-(forventet-w)/sd),8)
          [,1]
[1,] 0.2106075
> #
> # For aktieandelen af porteføljen:
```

```
> # Forventet slutbeløb:
> round(sum(lambda*mu),2)
[1] 136.5
> # Forventet udbytte i procent:
> #
> round(sum((mu-x)*lambda)/sum(x*lambda)*100,2)
[1] 9.2
> #
> # Standardafvigelse på slutbeløb:
> round(sd,2)
      [,1]
[1,] 18.03
> #
> # Sandsynligheden for negativt udbytte:
> round(pnorm(-sum((mu-x)*lambda)/sd),8)
          [,1]
[1,] 0.2617677
```

Her er konklusionen først og fremmest, at aktieandelen af porteføljen skal bestå af de to aktier i forholdet 3:2. Derimod er der ingen særlig grund til at foretrække den balance mellem den risikofri andel og aktieandelen som løsningen lægger op til, for den afhænger jo af γ, som vi har fastsat helt arbitrært.

5. Balancen mellem risikofri andel og aktieandel.

Som vi kan læse sidst i R–programmet har den optimale portefølje $75X_0 + 0.75X_1 + 0.50X_2$ middelværdi 214.5 standardafvigelsen 18.03, hvoraf følger at sandsynligheden for at denne normalfordelte variabel er mindre end 200 (altså sandsynligheden for at porteføljen ender med at være mindre værd end den kostede) er udregnet til 21.06%. Det må vist siges at være i overkanten af det acceptable. Samme beregning er foretaget for aktieandelen af porteføljen, og her fås naturligvis en endnu større sandsynlighed for tab (26.18%). Det er klart at vi omvendt, ved at forøge den risikofrie andel og tilsvarende formindske aktieandelen, kan opnå at denne sandsynlighed nedsættes til noget mere passende, f.eks. 5% eller 1%.

Udregningerne i denne forbindelse ser generelt sådan ud: Lad

$$A = \lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n$$

betegne værdien af aktieandelen efter 1 år. Sæt

$$\mu_A = \mathrm{E}A = \lambda_1 \mu_1 + \cdots + \lambda_n \mu_n$$

og

$$\sigma_A^2 = \mathrm{var}(A) = \lambda' \Sigma \lambda\,.$$

Med

$$a = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$$

betegner vi den oprindelige pris for denne rene aktieportefølje. Bemærk at normeringen er arbitrær, vi antager ikke at $a = w$. λ'erne kan vi således finde ved at løse optimeringsproblemet for en hvilken som helst værdi af γ. Vi begynder med at løse følgende problem: For en given "sikkerhedssandsynlighed" α (f.eks. 0.01 eller 0.05), bestem (en ny værdi af) $\lambda_0 \geq 0$ således at

$$P\left(\lambda_0(1 + r_0) + A \leq \lambda_0 + a\right) = \alpha\,.$$

Vi omskriver denne betingelse til

$$P\left(A - \mu_A \leq a - \lambda_0 r_0 - \mu_A\right) = \alpha\,.$$

Det betyder, at størrelsen $a - \lambda_0 r_0 - \mu_A$ på højre side af ulighedstegnet netop skal være α–fraktilen i fordelingen af $A - \mu_A$, dvs.

$$-\sigma_A u_\alpha = a - \lambda_0 r_0 - \mu_A$$

hvor $-u_\alpha$ er α–fraktilen i den normerede normale fordeling, dvs.

$$u_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha)\,.$$

Heraf fås

$$\lambda_0 = \frac{1}{r_0}\left(a - \mu_A + \sigma_A u_\alpha\right)\,.$$

Bemærk at λ_0 kan blive negativ. Det sker hvis aktieandelens pris a er mindre end den "worst case" værdi $\mu_A - \sigma_A u_\alpha$ af A, som vi har benyttet. I så fald er aktieandelen åbenbart sikker nok i sig selv, idet der jo gælder

$$P(A \leq a) \leq \alpha\,.$$

I princippet betyder det, at det kan betale sig at låne penge til den faste rente og investere dem i aktier. Men — endnu engang — da den almindelige investor ikke kan låne penge til renten r_0 er dette en hypotetisk konstruktion. Det eneste fornuftige i praksis vil være at sætte $\lambda_0 = 0$, og altså udelukkende investere i aktier. Dette er i øvrigt noget der næppe vil ske i praksis, hvor volatiliteten for rene aktieporteføljer oftest er for stor til at sikre overskud med sandsynlighed 0.01 eller 0.05 på årsbasis.

Hermed har vi fundet en portefølje $\lambda_0(1 + r_0) + A$ som er en blanding af den risikofrie investering og en optimalt sammensat aktieandel, i et blandingsforhold som netop sikrer at porteføljens endelige værdi er mindre end dens oprindelige pris med sandsynlighed lig med (evt. mindre end) α. Herefter kan vi konstruere en portefølje med alle de ønskede egenskaber ved en simpel renormering, altså ved at sætte

$$W = c\,(\lambda_0(1+r_0) + A)$$

hvor konstanten c fastlægges, så prisen for porteføljen netop bliver det beløb w vi har til rådighed for investering:

$$c(\lambda_0 + a) = w$$

eller

$$c = \frac{w}{\lambda_0 + a} = \frac{w}{\lambda_0 + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n}.$$

Vi illustrerer ved i fortsættelse af eksemplet fra afsnit 4 at konstruere en portefølje som består af en aktieandel med den rigtige sammensætning (3:2) og med en andel af risikofri kapital som er afbalanceret således at sandsynligheden for at tabe penge på investeringen er 1%:

```
> # Beregning af risikofri andel, når sandsynligheden
> # for tab skal være 0.01:
> muA <- sum(lambda*mu)
> a <- sum(lambda*x)
> alpha <- 0.01
> lambda0 <- (a-muA+sd*qnorm(1-alpha))/r0
> c <- as.numeric(w/(lambda0+a))
> lambda0 <- lambda0*c
> lambda <- c*lambda
> Lambda <- rbind(lambda0,lambda)
> Lambda
            [,1]
[1,] 171.7823663
[2,]   0.1693058
[3,]   0.1128705
> Lambda*rbind(1,x)
          [,1]
[1,] 171.78237
[2,]  16.93058
[3,]  11.28705
```

Med den sikkerhedsmargin vi har valgt (max 1% sandsynlighed for negativt afkast) er konklusionen altså, at vi skal investere således: For 171.78 kr. risikofri kapital, for 16.93 kr. aktie 1 og for 11.29 kr. aktie 2.

6. Estimation af parametrene.

I optimeringsalgoritmen indgår den faste rente r_0, samt middelværdivektor og kovariansmatriks for den normale fordeling af $(X_1, \ldots, X_n)$. Risikoaversionen indgår ikke, den kan fastsættes arbitrært under udregningen.

Med en investeringshorisont på 1 år skal r_0 i princippet fastsættes som den forrentning man kan opnå ved køb af realkredit– eller statsobligationer som udløber om et år. Det nærmeste vi kan komme til dette (bedre forslag modtages med glæde) ser ud til at være den korte rente på investeringstidspunktet, som man kan downloade fra diverse finansielle websider. Det har ikke umiddelbart været muligt at finde sådanne data som går helt tilbage til 1994. I mangel af bedre kan man måske bruge $r_0 = 0.04$ for de par år der mangler.

Middelværdier og varianser for de enkelte kursserier og kovarianser imellem dem må man estimere, for eksempel ud fra data fra året før det år, hvor investeringen skal løbe. Lad

$$X = \begin{bmatrix} x_0^{(1)} & \dots & x_0^{(n)} \\ x_1^{(1)} & \dots & x_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ x_t^{(1)} & \dots & x_t^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ x_T^{(1)} & \dots & x_T^{(n)} \end{bmatrix}$$

betegne de n serier, skrevet op som søjlerne i en matriks (i vores tilfælde altså en ca. 262 gange 20 matriks). Hvis perioden er et kalenderår betegner $x_t^{(j)}$ altså kursen for aktie j på børsdag t. $t = T$ er årets sidste dag, og $t = 0$ er sidste dag i det foregående år. Den simpleste anvendelige model for sådanne data går ud på, at størrelserne

$$y_t^{(j)} = \log \frac{x_t^{(j)}}{x_{t-1}^{(j)}} = \log x_t^{(j)} - \log x_{(t-1)}^{(j)}$$

opfylder følgende: De n–dimensionale stokastiske variable

$$y_t = \left(y_t^{(1)}, \dots, y_t^{(n)}\right), \quad t = 1, \dots, T$$

er uafhængige, identisk n–dimensionalt normalfordelte med middelværdivektor $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ og kovariansmatriks

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \dots & \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \dots & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Disse parametre kan estimeres på sædvanlig måde ved den empiriske middelværdivektor og den empiriske kovariansmatriks.

Begrundelsen for den stokastiske uafhængighed af kurserne til forskellige tidspunkter er, at hvis der ikke var stokastisk uafhængighed her kunne man benytte afhængigheden til at forudsige kurser ud fra tidligere observerede kurser, og på denne måde opnå en spekulationsgevinst som — hvis den blev udnyttet af alle, eller bare af mange — ville blive udlignet af de deraf følgende kursændringer. Begrundelsen for normaliteten er ren bekvemmelighed (og den er heller ikke altid opfyldt, ofte ses fordelinger med påviseligt tykkere haler end normalfordelingen), men til vores formål er den sikkert god nok.

Det er imidlertid ikke kun bekvemmelighed, som er begrundelsen for at det er de *logaritmiske tilvækster*, og ikke tilvæksterne af selve kurserne, der skal være normalfordelte. Ser man for eksempel på forholdet mellem to kurser, $x_t^{(j)}/x_t^{(i)}$, så er det jo oplagt ikke naturligt at antage denne størrelse normalfordelt, fordi dens inverse er en variabel af nøjagtig samme slags, og derfor så også burde være normalfordelt. Derimod passer det fint at antage at logaritmen til dette forhold er normalfordelt, for så bliver jo logaritmen til det inverse forhold automatisk også normalfordelt. Noget lignende gælder om de succesive forhold $x_t^{(j)}/x_{t-1}^{(j)}$ mellem kurser for samme aktie. Blandt andet fordi vi dermed undgår problemet med, at en normalfordelt variabel i princippet altid kan blive negativ med en positiv sandsynlighed.

Ved at antage, at de logaritmiske tilvækster (y'erne) er normalfordelte, har vi principielt også antaget at selve kurserne (x'erne) ikke kan være det. Det er jo i modstrid med antagelserne bag teorien for optimering af porteføljer, sådan som vi har præsenteret den. Men i praksis har dette ikke den store betydning, af følgende grund. Betragt, for en given aktie (idet vi nu udelader index j, og f.eks. skriver y_t i stedet for $y_t^{(j)}$ etc.) den stokastiske forrentning

$$1 + R = \frac{x_T}{x_0} = \frac{x_1}{x_0}\frac{x_2}{x_1}\cdots\frac{x_{T-1}}{x_T} = \exp(y_1 + y_2 + \cdots + y_T)$$

af den givne aktie hen over investeringsperioden. Den vil for det meste være af størrelsesorden $|R| \leq 0.2$. Vi kan derfor med acceptabel nøjagtighed bruge 1. ordens Taylor–approksimationen

$$1 + R \approx 1 + y_1 + y_2 + \cdots + y_T\,.$$

Vi kan endda gøre noget som er lidt bedre ved at lade summen af y'ernes *afvigelser* fra deres forventede værdi optræde som det "lille tal" i approksimationen:

$$1 + R = \exp((y_1 - \mu) + (y_2 - \mu) + \cdots + (y_T - \mu) + T\mu)$$

$$= \exp((y_1 - \mu) + (y_2 - \mu) + \cdots + (y_T - \mu))\exp(T\mu)$$

$$\approx \exp(T\mu)(1 + (y_1 - \mu) + (y_2 - \mu) + \cdots + (y_T - \mu)) \,.$$

Af denne approksimative omskrivning følger, at $1 + R$ er approksimativt normalfordelt med middelværdi $\exp(T\mu)$ og varians $\exp(T\mu)^2 T\sigma^2$. Eller, med de oprindelige betegnelser og en lille ekstra (trivel) krølle som vedrører kovarianserne:

Vektoren $(R_1, \ldots, R_n)$ *af forrentninger*

$$R_j = \frac{x_T}{x_0} - 1$$

over den givne periode er, under den statistiske model vi betragter, approksimativt n*–dimensionalt normalfordelt med*

$$\mathrm{E}(R_j) = \exp(T\mu_j) - 1 \,, \ \mathrm{var}(R_j) = T\exp(T\mu_j)^2\sigma_j^2$$

og med kovarianser

$$\mathrm{cov}(R_j, R_i) = T\exp(T\mu_j)\exp(T\mu_i)\rho_{ij}\sigma_j\sigma_i \,.$$

Dette er så begrundelsen for, at vi vil bruge optimeringsalgoritmen som beskrevet i afsnit 3–5 med følgende parametre:

Risikoaversionen γ kan vælges helt arbitrært (f.eks. $\gamma = 1$), da den kun indgår som en proportionalitetsfaktor på aktieandelen, som alligevel justeres som beskrevet i afsnit 5.

Som fast rente r_0 kan vi passende tage den korte rente ved investeringsperiodens begyndelse.

Middelværdier, varianser og kovarianser for X'erne beregnes ved at indsætte estimaterne fra den statistiske model for y'erne i ovenstående formler. Bemærk, at $1 + R_j$ ovenfor er den samme størrelse som i afsnit 1–3 hed X_j/x_j (altså for den periode vi benytter til estimation). Og estimatet for $\mu_j = 1 + r_j$ bliver simpelthen

$$\hat{\mu}_j = \exp(T\bar{y}_{\cdot}^{(j)}) = \exp(y_1^{(j)} + \cdots + y_T^{(j)}) = X_j/x_j \,.$$

Der er masser af varianter af denne model som kan overvejes. Perioder med forøget volatilitet kan helt eller delvis indfanges af ARCH eller GARCH modeller (som vi nok ikke vil komme ind på). Fænomener, som at variansen måske er større hen over en weekend eller ferie end for børsdage som er nabodage, kan man takle med enklere modifikationer. Men alle disse varianter er nok af mindre betydning, når det gælder anvendelsen til optimering af porteføljer. Det altafgørende spørgsmål, som der ikke er så meget at gøre ved (ud over at undersøge det direkte, som denne opgave lægger op til) er om modellens parametre er så stabile at estimater fra én periode kan bruges til optimering i den næste. Hvis dette ikke er tilfældet ender vi formodentlig med en portefølje, som varierer voldsomt fra år til år, og som derfor næppe kan antages at være “optimal” i nogen som helst forstand.