Opgave 2

Lad X være ligefordelt på intervallet $[1,4]$.
(a) Opskriv tætheden for X, og udregn $\mathrm{E}(X)$ og $\mathrm{var}(X)$.
Tætheden er (pr. def. af ligefordelingen)

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} \textit{ for } x \in [1,4] \\ 0 \textit{ ellers }. \end{cases}$$

Middelværdien er intervallets midtpunkt,
$\mathrm{E}X = 2.5,$
og variansen er (da fordelingen kan opfattes som transformation af en ligefordeling på enhedsintervallet efter formlen $X = 1 + 3X_0$)
$\mathrm{var}(X) = 3^2 \times \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$.

En ny stokastisk variabel defineres ved $Y = \sqrt{X}$.
(b) Udregn $\mathrm{E}(Y)$ og $\mathrm{var}(Y)$.
Vi får

$$\mathrm{E}Y = \frac{1}{3}\int_1^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_1^4 = \frac{2}{9}\left(4^{3/2} - 1^{3/2}\right) = \frac{2}{9} \times (8-1) = \frac{14}{9}.$$

Fra spm. (a) har vi

$$\mathrm{E}(Y^2) = \mathrm{E}X = 2.5,$$

så vi får

$$\mathrm{var}(Y) = 2.5 - \left(\frac{14}{9}\right)^2 = \frac{13}{162} = 0.08025.$$

(c) Opskriv tætheden for Y.
Da transformationen $y = t(x) = \sqrt{x}$ afbilder intervallet $[1,4]$ bijektivt (voksende) og kontinuert differentiabelt over i intervallet $[1,2]$ får vi tætheden

$$q(y) = \frac{\frac{1}{3}}{t'(x)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{2}{3}y$$

for $y \in [1,2]$. Udenfor dette interval er tætheden for Y naturligvis 0.