Reeksamen august 2002, Opgave 1

(a)

$$P(Y<1)=P(X_1<X_2)=P((X_1,X_2)\in\{(1,2),(1,3),(2,3)\})$$

$$=\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{2+3+6}{36}=\frac{11}{36}.$$

(b)

Da X_1 og $1/X_2$ er uafhængige kan vi benytte "produktreglen" for middelværdier således:

$$\mathrm{E}Y=\mathrm{E}\left(\frac{X_1}{X_2}\right)=\mathrm{E}\left(X_1\frac{1}{X_2}\right)=\mathrm{E}\left(X_1\right)\mathrm{E}\left(\frac{1}{X_2}\right)$$

$$=\left(1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{2}{6}+3\times\frac{3}{6}\right)\left(\frac{1}{1}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{6}\right)$$

$$=\frac{1+4+9}{6}\times\frac{1+1+1}{6}=\frac{14\times 3}{36}=\frac{7}{6}.$$

Hvis man ikke lige får denne idé kan middelværdien (faktisk lige så let) udregnes direkte som

$$\sum_{x_1=1}^{3}\sum_{x_2=1}^{3}\frac{x_1}{x_2}\times\frac{x_1}{6}\frac{x_2}{6}=\sum_{x_1=1}^{3}\sum_{x_2=1}^{3}\frac{x_1^2}{36}=3\sum_{x_1=1}^{3}\frac{x_1^2}{36}=\frac{1+4+9}{36}=\frac{7}{6}.$$

(c)

Den betingede fordeling af X_1, givet $Y=1$, har punktsandsynlighederne

$$P(X_1=x\mid Y=1)=P(X_1=x\mid X_1=X_2)=\frac{P(X_1=x\text{ og }X_1=X_2)}{P(X_1=X_2)}$$

$$=\frac{P(X_1=x)P(X_2=x)}{P(X_1=X_2)}=\frac{(x/6)^2}{(1/6)^2+(2/6)^2+(3/6)^2}=\begin{cases}\frac{1}{14} & \text{for } x=1\\ \frac{4}{14} & \text{for } x=2\\ \frac{9}{14} & \text{for } x=3\end{cases}$$