**Reeksamen august 2002, Opgave 2**

**(a)**

Transformationen $y = \log \frac{x}{1-x}$ afbilder enhedsintervallet ]0,1[ voksende på hele den reelle akse. Den omvendte afbildning ses at være givet ved $x = \frac{\exp(y)}{1+\exp(y)}$. Fordelingsfunktionen $F(y)$ for $Y$ er derfor givet ved

$$F(y) = P(Y \leq y) = P\left(X \leq \frac{\exp(y)}{1+\exp(y)}\right) = \frac{\exp(y)}{1+\exp(y)}.$$

**(b)**

Tætheden for $Y$ fås ved differentiation af fordelingsfunktionen:

$$p(y) = \frac{d}{dy}\left(\frac{\exp(y)}{1+\exp(y)}\right)$$

$$= \frac{\exp(y)(1+\exp(y)) - \exp(y)\exp(y)}{(1+\exp(y))^2} = \frac{\exp(y)}{(1+\exp(y))^2}.$$

Denne tæthed kan også udregnes ved direkte brug af transformationssætningen — det giver selvfølgelig samme resultat.

**(c)**

At

$$\mathrm{E}Y = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(y)}{(1+\exp(y))^2} y\, dy$$

er veldefineret følger af at tætheden er symmetrisk, og dens højre hale er domineret af $\exp(-y)$ (og middelværdien i eksponentialfordelingen er jo veldefineret). Af tæthedens symmetri følger umiddelbart, at middelværdien må være 0.

At tætheden er symmetrisk behøver ikke nødvendigvis begrundes. Det følger jo umiddelbart af, at skift af fortegn for $\log \frac{X}{1-X}$ svarer til ombytning af $X$ og $1-X$, og det ændrer selvfølgelig ikke på fordelingen. Men man kan også indse det direkte ved at gange med $\exp(y)^2$ i tæller og nævner:

$$p(-y) = \frac{\exp(-y)}{(1+\exp(-y))^2} = \frac{\exp(y)}{(\exp(y)+1)^2} = \frac{\exp(y)}{(1+\exp(y))^2} = p(y).$$