**Reeksamen august 2004, Opgave 2**

**(a)**

Det er klart at $p(x,y) \geq 0$. Vi mangler at vise at

$$\int_0^1 \int_0^1 p(x,y)\,dx\,dy = 1.$$

Det gør vi lettest ved at splitte $p(x,y) = x + y$ op i de to led $x$ og $y$. For eksempel er

$$\int_0^1 \int_0^1 x\,dx\,dy = \int_0^1 \left( \int_0^1 x\,dx \right)\,dy = \int_0^1 \frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\,.$$

Helt analogt fås naturligvis

$$\int_0^1 \int_0^1 y\,dx\,dy = \frac{1}{2}$$

og dermed

$$\int_0^1 \int_0^1 p(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\,.$$

**(b)**

Den marginale fordeling af $X$ får som bekendt tæthed

$$q(x) = \int_0^1 p(x,y)\,dy = \int_0^1 x\,dy + \int_0^1 y\,dy = x + \frac{1}{2}$$

Dette er for $x \in [0,1]$, udenfor enhedsintervallet bliver $q(x) = 0$ (hvis man vil tænke på $X$ som en stokastisk variabel på hele $\mathbf{R}$).

**(c)**

Vi får

$$\mathrm{E}X = \int_0^1 x(x+\frac{1}{2})\,dx = \int_0^1 (x^2 + \frac{x}{2})\,dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}\,,$$

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_0^1 x^2(x+\frac{1}{2})\,dx = \int_0^1 (x^3 + \frac{x^2}{2})\,dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}\,,$$

og dermed

$$\mathrm{var}(X) = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{60-49}{144} = \frac{11}{144}\,.$$

Til udregning af kovariansen får vi brug for

$$\mathrm{E}(XY) = \int_0^1 \int_0^1 xy(x+y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 x^2 y\,dx\,dy + \int_0^1 \int_0^1 xy^2\,dx\,dy = 2\int_0^1 \int_0^1 x^2 y\,dx\,dy$$

$$= 2\left(\int_0^1 x^2\,dx\right)\left(\int_0^1 y\,dy\right) = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\,.$$

Så er

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - (\mathrm{E}X)(\mathrm{E}Y) = \frac{1}{3} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{48-49}{144} = \frac{-1}{144}\,.$$