Eksamen juni 2005, Opgave 3

(a)

$$\hat{p}_1 = \frac{1306}{1526} = 0.8558\ , \quad \hat{p}_2 = \frac{535}{589} = 0.9083\ .$$

Ved tabelopslag finder vi at 99.5%–fraktilen i den normale fordeling er 2.576. De approksimative 99% konfidensgrænser for sandsynlighedsparametrene er således givet ved

$$p_1 = 0.8558 \pm 2.576 \times \sqrt{\frac{0.8558 \times (1-0.8558)}{1526}} = 0.8558 \pm 0.0232$$

svarende til sikkerhedsintervallet [0.8326,0.8790], og

$$p_2 = 0.9083 \pm 2.576 \times \sqrt{\frac{0.9083 \times (1-0.9083)}{589}} = 0.9083 \pm 0.0306$$

svarende til sikkerhedsintervallet [0.8777,0.9389].

(b)

Testet vi skal udføre er det sædvanlige test for uafhængighed:

$$-2\log q = 2 \times (1306 \log 1306 + \cdots + 54 \log 54 - \cdots + 2115 \log 2115)$$

$= 11.029$, som ligger rimeligt langt ude i halen af χ^2–fordelingen med 1 frihedsgrad, idet 99.9%–fraktilen er 10.828. Der er altså en tydelig forskel mellem de to erhvervsgruppers risiko for ufrivillig barnløshed, og da $\hat{p}_1 < \hat{p}_2$ bliver konklusionen, at denne risiko er større for malere end for jord– og betonarbejdere. Om det så skyldes organiske opløsningsmidler eller andre forskelle mellem de to grupper kan vi naturligvis ikke udtale os om med sikkerhed.

Pearson's teststørrelse bliver 10.382, altså omtrent samme konklusion ($\chi^2_1(99.5\%) = 7.879$). Kun et af de to tests kræves.

(c)

Den logit–lineære model

$$p_{ea} = \frac{\exp(\gamma + \alpha_e + \beta_a)}{1 + \exp(\gamma + \alpha_e + \beta_a)}$$

har åbenbart $2+3-1 = 4$ parametre (ligesom en additiv tosidet variansanalysemodel for en 2×3–tabel). Da den fulde model har 6 parametre skal teststørrelsen 5.51 vurderes i en χ^2–fordeling med $2 = 6 - 4$ frihedsgrader, hvor 95%–fraktilen er 5.991. Så dette test fører til godkendelse (omend med nød og næppe) af den logit–additive model. Denne model siger, at sandsynligheden for at få børn, givet at man prøver på det, afhænger af erhverv og alder på en sådan måde, at forskellen mellem de to erhvervs logit–transformerede sandsynlighedsparametre er den samme i alle tre aldersgrupper. Denne antagelse kan være svær at fortolke, men den giver i det mindste et simpelt udgangspunkt for videre reduktion til

$$p_{ea} = \frac{\exp(\gamma + \beta_a)}{1 + \exp(\gamma + \beta_a)} \,.$$

Denne model har åbenbart 3 parametre (den siger jo bare at aldersgrupperne har hver sin sandsynlighedsparameter), så teststørrelsen 8.81 skal vurderes i en χ^2–fordeling med $1 = 4 - 3$ frihedsgrader, hvor den er signifikant på 99.5%–niveauet (altså med en P–værdi som er mindre end 0.005). Vi må altså konkludere at der er forskel på de to erhvervs risiko for ufrivillig barnløshed. Da vi ikke har fået oplyst estimaterne i den logit–additive model kan vi ikke være helt sikre på at $\hat{\alpha}_1 < \hat{\alpha}_2$, svarende til at det er malerne som har størst risiko for barnløshed. Men det må det jo næsten med sikkerhed være, på baggrund af vores analyse af 2×2–tabellen.

Fordelen ved denne analyse er, at den delvis eliminerer en af de forskelle mellem de to erhvervsgrupper, som kunne være skyld i at testet i spørgsmål (b) førte til forkastelse, nemlig forskelle i aldersfordelingen. Ufrivillig barnløshed kan nemt tænkes at afhænge af alderen — formodentlig på en lidt kompliceret måde, som vi ikke kan undersøge helt til bunds da vi jo ikke har oplysning om hvor mange der simpelthen ikke har prøvet at få børn. Men hvis — for eksempel — jord– og betonarbejdere var gennemgående yngre end malere, og hvis de unge aldersgrupper gennemgående har en lav procentdel af ufrivilligt barnløse (simpelthen fordi de knapt nok har nået at prøve), så ville vi ved analysen af 2×2–tabellen netop se en sådan større risiko for barnløshed blandt malere, alene fordi de gennemgående er ældre end jord– og betonarbejdere.