

Reeksamen august 2005, Opgave 2

(a)

Det er klart at $p(x, y) > 0$ for $x, y > 0$, og

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} p(x, y) dx dy &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)} \right) dx \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(e^{-y} \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx + y e^{-y} \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (e^{-y} + y e^{-y}) dy = \frac{1}{2}(1+1) = 1,\end{aligned}$$

hvor vi i et par mellemregninger har benyttet at

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1.$$

Heraf følger at p er en sandsynlighedstæthed.

(b)

Tætheden for Y får vi ved at integrere x ud af udtrykket for den simultane tæthed. Men det har vi allerede gjort som mellemregning under (a), så vi skriver bare af:

$$p_2(y) = \int_0^{+\infty} p(x, y) dx = \dots = \frac{1}{2}(e^{-y} + y e^{-y}) = \frac{1}{2}(1+y)e^{-y}.$$

Heraf følger at

$$\begin{aligned}EY &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}(1+y)e^{-y} y dy = \frac{1}{2} \left(\int_0^{+\infty} e^{-y} y dy + \int_0^{+\infty} e^{-y} y^2 dy \right) \\ &= \frac{1}{2}(1! + 2!) = \frac{1}{2}(1+2) = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

På samme måde fås

$$E(Y^2) = \dots = \frac{1}{2}(2! + 3!) = \frac{1}{2}(2+6) = 4$$

hvoraf følger at

$$\text{var}(Y) = E(Y^2) - (EY)^2 = 4 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{16}{4} - \frac{9}{4} = \frac{7}{4}.$$

(c)

Det er klart at afbildningen, som til et par af positive tal knytter deres sum og det første tals relative andel i summen, afbilder første kvadrant bijektivt på $]0, +\infty[\times]0, 1[$. Så vi kan bruge den flerdimensionale version af transformationssætningen til at opskrive tætheden for (S, R) . Funktionaldeterminanten bliver

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \frac{y}{(x+y)^2} \\ 1 & \frac{-x}{(x+y)^2} \end{pmatrix} = \frac{-1}{x+y} = -\frac{1}{s}$$

så tætheden for (S, R) får vi ved at dividere den oprindelige tæthed med $|- \frac{1}{s}| = \frac{1}{s}$ og omskrive dette udtryk til en funktion af s og r :

$$q(s, r) = \frac{1}{1/s} \frac{1}{2} (x+y) e^{-(x+y)} = s \frac{1}{2} s e^{-s} = \left(\frac{1}{2} s^2 e^{-s} \right) \times 1.$$

Heraf følger umiddelbart (da tætheden kan opfattes som produkt af en funktion af s og en funktion af r) at S og R er stokastisk uafhængige, S Γ -fordelt med parameter 3 og R ligefordelt på enhedsintervallet.