

Eksamen maj 2007, Opgave 1

(a)

$$EX_1 = \frac{1}{8} \times 0 + \frac{3}{8} \times 1 + \frac{3}{8} \times 2 + \frac{1}{8} \times 3 = \frac{12}{8} = \mathbf{1.5}.$$

$$E(X_1^2) = \frac{1}{8} \times 0 + \frac{3}{8} \times 1 + \frac{3}{8} \times 4 + \frac{1}{8} \times 9 = \frac{24}{8} = 3.$$

$$\text{var}(X_1) = E(X_1^2) - (EX_1)^2 = 3 - 2.25 = \mathbf{0.75}.$$

(b)

Ifølge almindelige regneregler for middelværdier og varianser er

$$ES = EX_1 + EX_2 = 2 \times 1.5 = \mathbf{3},$$

$$\text{var}(S) = \text{var}(X_1) + \text{var}(X_2) = 2 \times 0.75 = \mathbf{1.5}.$$

Værdien $S = 2$ fås for $(X_1, X_2) = (0, 2), (1, 1)$ og $(2, 0)$. Så vi får

$$P(S = 2) = \frac{1}{8} \times \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{15}{64} = \mathbf{0.2344}.$$

Bemærkning: Spørgsmål (a) og (b) kan man komme lidt lettere om ved hvis man starter med at bemærke, at $p(x)$ faktisk er sandsynlighedsfunktionen for en binomialfordeling med antalsparameter 3 og sandsynlighedsparameter 0.5.

(c)

$$\begin{aligned} P(X_1 \leq 1 \mid S = 3) &= \frac{P(X_1 \leq 1 \text{ og } S = 3)}{P(S = 3)} \\ &= \frac{P((X_1, X_2) \in \{(0, 3), (1, 2)\})}{P((X_1, X_2) \in \{(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)\})} \\ &= \frac{\frac{1}{8} \times \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{3}{8}}{\frac{1}{8} \times \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{8}} = \frac{1}{2} = \mathbf{0.5}. \end{aligned}$$