Opgave 2, reeksamen august 2007.

(a)

På grund af Γ–fordelingens foldningsegenskab er $S = X_1 + X_2$ Γ–fordelt med formparameter 2+2=4. Heraf følger (opgave 7.1.1, Ssr. side 127) at

$$\mathrm{E}S = \mathrm{var}(S) = \mathbf{4}\,.$$

Hvis man ikke lige kommer på den tanke må man foretage en direkte udregning:

$$\mathrm{E}(X_1) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\,dx = \Gamma(3) = 2! = 2\,,$$

$$\mathrm{E}(X_1^2) = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x}\,dx = \Gamma(4) = 3! = 6\,,$$

$$\mathrm{var}(X_1) = \mathrm{E}(X_1^2) - (\mathrm{E}(X_1))^2 = 6 - 4 = 2\,.$$

Af velkendte regneregler følger så at

$$\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) = 2 + 2 = 4$$

og

$$\mathrm{var}(S) = \mathrm{var}(X_1) + \mathrm{var}(X_2) = 2 + 2 = 4\,.$$

(b)

Transformationen fra $\mathbf{R}_+$ til $\mathbf{R}_+$ givet ved $y = \sqrt{x}$ er voksende og bijektiv med invers $x = y^2$. Tætheden for y er derfor givet ved

$$q(y) = \frac{dx}{dy} p(x) = (2y)(xe^{-x}) = (2y)(y^2 e^{-y^2}) = 2y^3 e^{-y^2}$$

for $y > 0$.

(c)

Eftersom F har differentialkvotient

$$F'(x) = 0 - \big((1+0)e^{-x} + (x+1)(-e^{-x})\big) = xe^{-x} = p(x)$$

og netop antager værdien 0 for $x = 0$, kan F (ifølge sammenhængen mellem differentiation og integration) skrives som

$$F(x) = \int_0^x p(z)dz\,,$$

dvs. F er den til p hørende fordelingsfunktion. Heraf følger at

$$P(X_1 > 2) = 1 - P(X_1 \le 2) = 1 - F(2)$$
$$= (2+1)e^{-2} = 3e^{-2} = \mathbf{0.4060}\,.$$