Reeksamen august 2009, Opgave 4

(a)

Mellemregningsstørrelser:

$\mathrm{SSD}_x = 13228 - 770^2/50 = 1370$
$\mathrm{SSD}_y = 124903 - 2149^2/50 = 32538$
$\mathrm{SPD} = 38482 - 770 \times 2149/50 = 5387.4$
$\mathrm{SSD}_{\mathrm{res}} = 32539 - 5387.4^2/1370 = 11353.54$

Herefter fås estimaterne

$\hat{\sigma}^2 = 11353.52/48 = \mathbf{236.53}$,

$\hat{\beta} = 5387.4/1370 = \mathbf{3.932}$ og

$\hat{\alpha} = 2149/50 - (770/50) * 3.932 = \mathbf{-17.57}$.

Til bestemmelse af 95% sikkerhedsgrænser for $\hat{\beta}$ fås (idet 97.5% fraktilen i T–fordelingen med 48 frihedsgrader er meget tæt på 2.011)

$2.011 \times \sqrt{236.53/1370} = 0.8356$.

Sikkerhedsgrænserne for β bliver således

$3.932 - 0.8356 = 3.096$ og
$3.932 + 0.8356 = 4.768$

svarende til sikkerhedsintervallet [**3.096,4.768**].

(b)

Estimatoren for middelværdien af en bremselængde ved 20 mph. er

$$\hat{\alpha} + 20\hat{\beta} = -17.57 + 3.932 \times 20 = 61.07.$$

Til udregning af sikkerhedsgrænserne skal vi bruge

$$2.011 \times \sqrt{\left(\frac{1}{50} + \frac{(20 - \frac{770}{50})^2}{1370}\right) 236.53} = 2.011 \times 2.8955 = 5.823\,.$$

Vi får altså $\alpha + 20\beta = 61.07 \pm 5.823$, svarende til 95% sikkerhedsintervallet [**55.25,66.89**].

(c)

I denne model kan ingen af de to forklarende variable umiddelbart fjernes fra modellen, da begge P–værdierne er under 5 procent. Den mindste (for x^2) endda helt ned under 5 promille. Det kunne være interessant at vide, om det manglende konstantled, som rimeligvis er fjernet fordi det ikke bør være der ifølge de fysiske love, rent faktisk også var insignifikant (det var det, men det har man ikke en chance for at finde ud af til eksamen). Men uanset dette: Da modellen har en fysisk fortolkning, og et variansestimat som er mindre end det vi fik i den simple regressionsmodel, bør den nok foretrækkes frem for denne.

En exceptionelt god besvarelse kunne desuden omfatte følgende kommentarer til koefficienternes fortolkning: Koefficienten γ til x^2 er lidt svær at fortolke, fordi den har noget at gøre med dæks friktion mod vejbane osv. Men koefficienten β til x er nem at forstå, for den er simpelthen reaktionstiden. Størrelsen βx er jo den distance bilen tilbagelægger inden føreren når at reagere, og når vi dividerer den med hastigheden x får vi netop den tid det har taget at tilbagelægge denne distance. Det eneste problem er de enheder der bruges. Bremselængden måles jo i feet, og hastigheden i miles per hour. Enheden for β er således ft./mph. Vi må derfor foretage følgende omregning, som forudsætter at vi ved at en time består af 3600 sekunder (hvilket de fleste vel ved) og at en mile består af 5280 feet (hvilket der måske er lidt færre der lige kan huske):

$$\hat{\beta} \text{ ft./mph.} = 3.932 \text{ ft./mph.} = 3.932 \frac{\text{feet}}{\text{miles / hour}}$$

$$= 3.932 \frac{\text{feet} \times \text{hour}}{\text{miles}} = 3.932 \frac{\text{feet} \times 3600 \text{ sec.}}{5280 \text{ feet}} = 2.681 \text{ sec.}$$

Dette er altså den estimerede reaktionstid. Lovligt høj, måske, men dog tæt på hvad man ville forvente. Desuden er den jo ret usikkert bestemt (i de oprindelige enheder sådan ca. 1.24 ± 1.08), så den kan sagtens være meget tættere på 0. I denne forstand ser modellen ganske realistisk ud.